

Etude d'un problème de localisation : Le problème de Fermat-Weber

Cornu Antoine, Sarrasin Nicolas, Bercher Matthieu

Université de Bourgogne, 2008

Table des matières

1	<u>Introduction</u>	3
2	<u>Présentation du problème d'optimisation</u>	4
3	<u>Théorie relative au problème d'optimisation</u>	6
3.1	<u>Du problème à l'algorithme</u>	6
3.2	<u>Algorithme proximal</u>	9
3.2.1	<u>Définition d'un opérateur</u>	9
3.2.2	<u>Convergence de l'algorithme proximal</u>	9
4	<u>Présentation de l'algorithme de Fermat-Weber</u>	13
4.1	<u>Projection sur A</u>	13
4.2	<u>Projection sur A^\perp</u>	14
4.3	<u>Projection sur B_i^0</u>	15
4.3.1	<u>Définition d'une boule duale</u>	15
4.3.2	<u>Projection sur la boule l_2</u>	16
4.3.3	<u>Projection sur une boule polyédrique</u>	16
5	<u>Exemples</u>	18
6	<u>Conclusion</u>	21

1 Introduction

Le problème de Fermat-Weber est un problème de localisation. La résolution de ce problème offre des solutions à de nombreux problèmes dans différents domaines. Par exemple, l'emplacement d'un nouveau supermarché ou d'une nouvelle pharmacie prend en compte les populations avoisinants pour choisir le lieu exact du futur emplacement. La résolution du problème de Fermat-Weber nous permet de conclure sur le meilleur lieu géométrique pour implanter une telle structure commerciale.

Notre objectif est donc de traiter ce problème de Fermat-Weber et de créer un algorithme permettant de le résoudre.

2 Présentation du problème d'optimisation

Le problème de Fermat-Weber consiste en la résolution du problème suivant :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) := \sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_i(x - a_i) \end{array} \right.$$

où γ_i est une norme de \mathbb{R}^2 et $\omega_i > 0$. On notera $B_i^0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \gamma_i(x) \leq 1\}$ la boule unité associée à la norme γ_i duale de la norme γ_i .

Toute norme est convexe. De plus chaque norme γ_i est multiplié par le coefficient ω_i qui est positif donc $\omega_i \gamma_i$ reste une fonction convexe. $f(x)$ est donc la somme de fonctions convexes donc $f(x)$ est convexe. Cela implique donc que le problème d'optimisation admet bien une solution.

Ce problème est clairement équivalent au problème suivant :

$$(\hat{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{x} \in A} F(x) := \sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_i(x_i - a_i) \end{array} \right.$$

où $A = \{\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n : x_1 = \dots = x_n\}$

Par la suite, on considérera toujours le problème (\hat{P}) . En effet, au lieu de travailler avec $x \in \mathbb{R}^2$, il est plus commode d'utiliser $\hat{x} = \underbrace{(x, x, \dots, x)}_{n \text{ fois}} \in (\mathbb{R}^2)^n$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, on introduit le problème dual (\hat{D}) :

$$(\hat{D}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \inf \sum_{i=1}^n \langle a_i, p_i \rangle \\ \hat{p} \in A^\perp \\ \gamma_i(p_i) \leq \omega_i, i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Les conditions d'optimalité du problème primal (\hat{P}) et du problème dual (\hat{D}) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} \text{ solution de } (\hat{P}) \\ \hat{p} \text{ solution de } (\hat{D}) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} \in A, \hat{p} \in A^\perp \\ \hat{p} \in \partial F(\hat{x}) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = (x, \dots, x), \hat{p} = (p_1, \dots, p_n), \\ \sum_{i=1}^n p_i = 0, \\ x - a_i \in N(B_i^0, p_i/\omega_i) \end{array} \right.$$

Où on note $\partial\varphi(x)$ le sous-différentiel de φ en x défini par :

$$\partial\varphi(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^3 : \varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle p, y - x \rangle, \forall y \right\}$$

L'algorithme de Fermat-Weber permettant de trouver une solution au problème est décrit de la manière suivante :

(1) Initialisation :

$k=0$

On pose $\hat{x}^0 = (x^0, \dots, x^0) \in A$ et $\hat{p}^0 \in A^\perp$.

(2) A l'itération k :

On détermine pour $i=1, \dots, n$

$$\begin{cases} p_i'^k = \omega_i \text{Proj}[(x^k - a_i + p_i^k)/\omega_i, B_i^0] \\ x_i'^k = x^k + p_i^k - p_i'^k \end{cases}$$

On détermine :

$$\begin{cases} \hat{x}^{k+1} = \text{Proj}(\hat{x}'^k, A) \\ \hat{p}^{k+1} = \text{Proj}(\hat{p}'^k, A^\perp) \end{cases}$$

3 Théorie relative au problème d'optimisation

3.1 Du problème à l'algorithme

Soit $\varphi_i(x) = \gamma_i(x - a_i)$ et $f_i(x) = \omega_i \varphi_i(x)$

1) Montrons que $p \in \partial\varphi_i(x) \iff x - a_i \in N(B_i, p)$

• Montrons d'abord que $p \in \partial\varphi_i(x) \Rightarrow x - a_i \in N(B_i^0, p)$

$$p \in \partial\varphi_i(x) \Rightarrow \varphi_i(y) \geq \varphi_i(x) + \langle p, y - x \rangle, \quad \forall y$$

$$\text{or } \varphi_i(x) = \gamma_i(x - a_i)$$

on a donc :

$$(*) \quad \gamma_i(y - a_i) \geq \gamma_i(x - a_i) + \langle p, y - x \rangle, \quad \forall y.$$

On prend $y = a_i$ dans l'inégalité précédente :

$$\gamma_i(x - a_i) + \langle p, a_i - x \rangle \leq 0$$

$$\text{d'où : } \sup_{u \in B_i^0} \langle x - a_i, u \rangle \leq \langle p, x - a_i \rangle$$

$$\text{d'où : } \langle x - a_i, u - p \rangle \leq 0, \quad \forall u \in B_i^0.$$

Montrons par l'absurde que $p \in B_i^0$.

On suppose que $p \notin B_i^0$.

$$\text{On a : } \gamma_i^0(p) = \sup_{v \in B_i} \langle p, v \rangle > 1$$

$$\exists \hat{v} \in B_i, \langle p, \hat{v} \rangle > 1 \geq \gamma(\hat{v})$$

On pose $y = t\hat{v} + a_i$, avec $t \in \mathbb{R}$ et on remplace y dans l'inégalité (*).

$$\gamma_i(t\hat{v}) \geq \gamma_i(x - a_i) + \langle p, t\hat{v} + a_i - x \rangle, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

L'inégalité est vraie quel que soit $t \in \mathbb{R}$ donc l'inégalité est vraie quel que soit $t \in \mathbb{R}^+$

$$t \underbrace{(\gamma_i(\hat{v} - \langle p, \hat{v} \rangle))}_{<0} \geq \underbrace{\gamma_i(x - a_i) - \langle p, x - a_i \rangle}_{\text{fixe}}$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient une contradiction. On peut conclure que $p \in B_i^0$.

$$\text{Ainsi } \boxed{x - a_i \in N(B_i^0, p)}$$

- Montrons maintenant que : $x - a_i \in N(B_i^0, p) \Rightarrow p \in \partial\varphi_i(x)$

D'après la définition du cône normal, on a :

$$\begin{aligned} \langle x - a_i, w - p \rangle &\leq 0, \forall w \in B_i^0 \\ \Rightarrow \langle x - a_i, w \rangle &\leq \langle x - a_i, p \rangle, \forall w \in B_i^0 \\ \Rightarrow \underbrace{\sup_{w \in B_i^0} \langle x - a_i, w \rangle}_{\gamma_i(x - a_i)} &\leq \langle x - a_i, p \rangle \end{aligned}$$

Comme $p \in B_i^0$, on a l'égalité suivante :

$$\gamma_i(x - a_i) + \langle p, y - x \rangle = \langle x - a_i, p \rangle + \langle p, y - x \rangle = \langle p, y - a_i \rangle \leq \sup_{w \in B_i^0} \langle w, y - a_i \rangle$$

$$\text{D'où : } \gamma_i(x - a_i) + \langle p, y - x \rangle \leq \sup_{w \in B_i^0} \langle w, y - a_i \rangle$$

$$\text{c'est-à-dire : } \varphi_i(y) \geq \varphi_i(x) + \langle p, y - x \rangle, \quad \forall y$$

$$\text{Donc } \boxed{p \in \partial\varphi_i(x)}$$

- Montrons que $p \in \partial f_i(x) \iff x - a_i \in N(B_i, p/\omega_i)$

$$p \in \partial f_i(x) \iff f_i(y) \geq f_i(x) + \langle p, y - x \rangle, \quad \forall y$$

$$\iff \omega_i \varphi_i(y) \geq \omega_i \varphi_i(x) + \langle p, y - x \rangle, \quad \forall y$$

$$\iff \omega_i(\varphi_i(y) - \varphi_i(x)) \geq \langle p, y - x \rangle, \quad \forall y$$

$$\iff \varphi_i(y) - \varphi_i(x) \geq \left\langle \frac{p}{\omega_i}, y - x \right\rangle, \quad \forall y$$

car par hypothèse $\omega_i > 0, \quad \forall i$.

$$\iff \varphi_i(y) \geq \varphi_i(x) + \left\langle \frac{p}{\omega_i}, y - x \right\rangle, \quad \forall y$$

$$\iff \frac{p}{\omega_i} \in \partial\varphi_i(x)$$

$$\iff \boxed{x - a_i \in N(B_i^0, \frac{p}{\omega_i})}$$

- Montrons que $x - a_i \in N(B_i^0, \frac{p}{\omega_i}) \iff p = \omega_i \text{ Proj}(\frac{x - a_i + p}{\omega_i}, B_i^0)$

$$\begin{aligned}
x - a_i \in N(B_i^0, \frac{p}{\omega_i}) &\iff x - a_i + p - p \in N(B_i^0, \frac{p}{\omega_i}) \\
&\iff \left\langle x - a_i + p - p, u - \frac{p}{\omega_i} \right\rangle \leq 0, \forall u \in B_i^0 \\
&\iff \omega_i \left\langle \frac{x - a_i + p}{\omega_i} - \frac{p}{\omega_i}, u - \frac{p}{\omega_i} \right\rangle \leq 0, \quad \forall u \in B_i^0 \\
&\iff \left\langle \frac{x - a_i + p}{\omega_i} - \frac{p}{\omega_i}, u - \frac{p}{\omega_i} \right\rangle \leq 0, \quad \forall u \in B_i^0 \\
&\quad \text{car par hypothèse } \omega_i > 0, \quad \forall i. \\
&\iff \frac{p}{\omega_i} = \text{Proj}\left(\frac{x - a_i + p}{\omega_i}, B_i^0\right) \\
&\iff \boxed{p = \omega_i \text{Proj}\left(\frac{x - a_i + p}{\omega_i}, B_i^0\right)}
\end{aligned}$$

2) L'algorithme que l'on a décrit dans la partie précédente définit bien les suite $(\hat{x}^k), (\hat{p}^k)$ et $(\hat{x}'^k), (\hat{p}'^k)$ telles que :

$$\begin{cases} \hat{x}^k \in A, \hat{p}^k \in A^\perp \\ \hat{x}'^k + \hat{p}'^k = \hat{x}^k + \hat{p}^k \end{cases}$$

démonstration :

D'après l'algorithme, On a que $\hat{x}^0 \in A$ et que \hat{x}^{k+1} est le projeté de \hat{x}'^k sur A pour tout $k > 0$. On a donc bien que $\hat{x}^k \in A$ pour tout k .

De même, $\hat{p}^0 \in A^\perp$ et \hat{p}^{k+1} est le projeté de \hat{p}'^k sur A^\perp pour tout $k > 0$, cela implique que $\hat{p}^k \in A^\perp$ pour tout k .

Pour $i=1, \dots, n$, l'algorithme calcule $x_i'^k = x^k + p_i^k - p_i'^k$, on a donc clairement $\hat{x}'^k + \hat{p}'^k = \hat{x}^k + \hat{p}^k$

Enfin, pour $i=1, \dots, n$, à l'itération k , l'algorithme calcule

$$p_i'^k = \omega_i \text{Proj}[(x^k - a_i + p_i^k)/\omega_i, B_i^0]$$

Vu que $x_i'^k = x^k + p_i^k - p_i'^k$, $x^k = x_i'^k + p_i'^k - p_i^k$. On obtient alors en remplaçant :

$$p_i'^k = \omega_i \text{Proj}[(x_i'^k + p_i'^k - p_i^k - a_i + p_i^k)/\omega_i, B_i^0]$$

$$p_i'^k = \omega_i \text{Proj}[(x_i'^k - a_i + p_i'^k)/\omega_i, B_i^0]$$

Or, on a montré précédemment l'équivalence $p \in \partial f_i(x) \iff p = \omega_i \text{ Proj}(\frac{x-a_i+p}{\omega_i}, B_i^0)$. Ainsi, on a bien que $p_i^{k+1} \in \partial f_i(x_i^{k+1})$

En conclusion, On vient de montrer que l'algorithme de Fermat-Weber est construit de manière à vérifier les conditions d'optimalité du problème primal (\hat{P}) et du problème dual (\hat{D}).

3.2 Algorithme proximal

Les conditions d'optimalité précédentes peuvent s'écrire différemment à l'aide d'un opérateur $T : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n$, monotone maximal. Les conditions d'optimalité deviennent alors :

$$\hat{x} \in A, \hat{p} \in A^\perp, 0 \in T(\hat{x} + \hat{p})$$

et tel que $\hat{z}^{k+1} = (I + T)^{-1}(\hat{z}^k)$ où $\hat{z}^k = \hat{x}^k + \hat{p}^k$

On va montrer dans cette partie que cet algorithme proximal converge. Une solution de cet algorithme sera donc une solution au problème de Fermat-Weber.

3.2.1 Définition d'un opérateur

$T : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n$ est un opérateur si à tout élément $x \in (\mathbb{R}^2)^n$, on a que $T(x)$ est un ensemble inclus dans $(\mathbb{R}^2)^n$ ($T(x) \in (\mathbb{R}^2)^n$).

Par définition,

T est monotone si $\langle x - x', y - y' \rangle \geq 0 \quad \forall y \in T(x), \quad \forall y' \in T(x')$

T est monotone maximal si $\langle x - x', y - y' \rangle \geq 0 \quad \forall y' \in T(x') \implies y \in T(x)$

3.2.2 Convergence de l'algorithme proximal

On définit une suite $\{z^k\}$ par $z^{k+1} = (I + T)^{-1}(z^k)$ où T est un opérateur monotone maximal.

1) Montrons que $(I + T)^{-1}$ est une application, i.e. pour tout x il existe y unique tel que $y = (I + T)^{-1}(x)$

- Montrons d'abord l'existence :

$$I : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$u \longmapsto u$$

et :

$$T : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$v \longmapsto T(v)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{2n}$, il existe un y , par définition de I et de T , tel que :

$$x \in I(y) + T(y)$$

$$\text{donc : } x \in (I + T)(y)$$

$$\text{donc : } \exists y / (I + T)^{-1}(x) = y$$

- Montrons l'unicité :

On montre par l'absurde. On suppose qu'il existe $y_1 \in \mathbb{R}^{2n}$ et $y_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que :

$$\begin{cases} (I+T)^{-1}(x) = y_1 \\ (I+T)^{-1}(x) = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (I+T)(y_1) = y_1 + T(y_1) \\ x \in (I+T)(y_2) = y_2 + T(y_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y_1 \in T(y_1) \\ x - y_2 \in T(y_2) \end{cases}$$

Or T est un opérateur monotone donc $\langle y_1 - y_2, x - y_1 - x + y_2 \rangle \geq 0$

$$\langle y_1 - y_2, -y_1 + y_2 \rangle \geq 0$$

$$- \|y_1 - y_2\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|y_1 - y_2\|^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Il existe donc un unique y tel que pour tout x on a : $y = (I+T)^{-1}(x)$.

2) Soit $R = (I+T)^{-1}$ et $Q = I - R$

- Vérifions que $Q(z) \in T(R(z))$

$$Q = I - R \text{ donc } Q(z) = z - R(z) = z - (I+T)^{-1}(z)$$

Or on a vu que $(I+T)^{-1}$ était une application, donc il existe un unique y tel que : $y = (I+T)^{-1}(z) = R(z)$.

Ainsi

$$z \in (I+T)(y) \Rightarrow z \in y + T(y)$$

Donc

$$Q(z) = z - y \in y + T(y) - y$$

$$\boxed{Q(z) \in T(R(z))}$$

- Montrons l'inégalité suivante :

$$\|R(z_1) - R(z_2)\|^2 + \|Q(z_1) - Q(z_2)\|^2 \leq \|z_1 - z_2\|^2 \quad \forall z_1, \forall z_2$$

$$\text{On a } \|z_1 - z_2\|^2 = \|Q(z_1) - Q(z_2) - R(z_1) - R(z_2)\|^2$$

$$\|z_1 - z_2\|^2 = \|Q(z_1) - Q(z_2)\|^2 + \|R(z_1) - R(z_2)\|^2 + 2 \left\langle \underbrace{Q(z_1)}_{\in T(R(z_1))} - \underbrace{Q(z_2)}_{\in T(R(z_2))}, R(z_1) - R(z_2) \right\rangle$$

Vu que T est monotone, on a que :

$$\langle Q(z_1) - Q(z_2), R(z_1) - R(z_2) \rangle \geq 0$$

On a donc bien :

$$\boxed{\|z_1 - z_2\|^2 \geq \|R(z_1) - R(z_2)\|^2 + \|Q(z_1) - Q(z_2)\|^2, \quad \forall z_1, \forall z_2}$$

3) Soit z^* un zéro de T , i.e. $0 \in T(z^*)$.

• Montrons que la suite $\{\|z^k - z^*\|\}$ converge.

$$z^* - z^* = 0 \in T(z^*) \text{ donc } z^* \in (I + T)(z^*)$$

Or $(I + T)^{-1}$ est une application donc :

$$z^* = (I + T)^{-1}(z^*) \Rightarrow z^* = R(z^*)$$

D'après l'inégalité précédente, on a que :

$$\begin{aligned} \|R(z^k) - R(z^*)\|^2 + \|Q(z^k) - Q(z^*)\|^2 &\leq \|z^k - z^*\|^2 \\ \|z^{k+1} - z^*\|^2 + \|Q(z^k) - Q(z^*)\|^2 &\leq \|z^k - z^*\|^2 \\ \|z^{k+1} - z^*\|^2 &\leq \|z^k - z^*\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\{\|z^{k+1} - z^*\|\}$ est une suite décroissante et positive donc $\{\|z^{k+1} - z^*\|\}$ est une suite convergente.

• Montrons que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q(z^k) = 0$

On pose $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|z^{k+1} - z^*\| = l < +\infty$

D'après l'inégalité démontrée précédemment,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Q(z^k) - Q(z^*)\|^2 &\leq \|z^k - z^*\|^2 - \|z^{k+1} - z^*\|^2 \\ \text{et } Q(z^*) = 0 \text{ ainsi } 0 \leq \|Q(z^k)\|^2 &\leq \underbrace{\|z^k - z^*\|^2}_{\rightarrow l^2} - \underbrace{\|z^{k+1} - z^*\|^2}_{\rightarrow l^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|Q(z^k)\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(z^k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0}$$

• En déduire qu'il existe une valeur d'adhérence de la suite $\{z^k\}$.

$$\text{On a } 0 \leq \|z^k\| = \|z^k - z^* + z^*\| \leq \|z^k - z^*\| + \|z^*\|$$

Or la suite $\{\|z^{k+1} - z^*\|\}$ est convergente, donc pour tout k , il existe M_k tel que $\|z^k - z^*\| \leq M_k$

$$\text{On obtient : } 0 \leq \|z^k\| \leq M_k + \|z^*\|$$

La suite $\{z^k\}$ est donc bornée. La suite $\{z^k\}$ admet alors une valeur d'adhérence s .

- Montrons que cette valeur d'adhérence s vérifie : $\langle x - s, y \rangle \geq 0, \forall y \in T(s)$

s est une valeur d'adhérence de $\{z^k\}$

on a que $z^{k+1} = (I + T)^{-1}(z^k)$ donc $z^k \in (I + T)(z^{k+1})$

c'est à dire : $z^k \in z^{k+1} + T(z^{k+1})$

Donc $z^k - z^{k+1} \in T(z^{k+1})$

Comme T est monotone, on a pour tout $y \in T(x), \langle x - z^{k+1}, y - (z^k - z^{k+1}) \rangle \geq 0, \forall k$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction croissante telle que $z^{\varphi(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} s$.

On a donc : $\langle x - z^{\varphi(k)+1}, y - (z^{\varphi(k)} - z^{\varphi(k)+1}) \rangle \geq 0$

Quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\boxed{\langle x - s, y \rangle \geq 0, \forall y \in T(x)}$$

- Montrons que s est un zéro de T .

On a : $\langle x - s, y \rangle \geq 0, \forall y \in T(x)$

Cela entraîne :

$$\langle s - x, 0 - y \rangle \geq 0, \forall y \in T(x)$$

or T est maximal donc :

$$\boxed{0 \in T(x)}$$

4) Montrons que la suite $\{z^k\}$ converge vers un zéro de T .

Montrons que la valeur d'adhérence s de la suite $\{z^k\}$ est unique.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux valeurs d'adhérences différentes s_1 et s_2 de la suite $\{z^k\}$.

On a : $\langle x - s_1, y \rangle \geq 0, \forall y \in T(x)$

et $\langle x - s_2, y \rangle \geq 0, \forall y \in T(x)$

On obtient : $\langle s_2 - s_1, y \rangle \geq 0, \forall y \in T(s_2)$

et : $\langle s_1 - s_2, y \rangle \geq 0, \forall y \in T(s_1)$

D'après la question précédente, on a : $0 \in T(s_1)$ et $0 \in T(s_2)$
 On prend donc $y = 0$ dans les deux équations et on trouve :

$$\begin{aligned} \langle s_2 - s_1, 0 \rangle &= 0 \\ \langle s_1 - s_2, 0 \rangle &= 0 \\ \langle s_2 - s_1, s_1 - s_2 \rangle &= 0 \\ \|s_2 - s_1\|^2 &= 0 \\ \Rightarrow s_2 &= s_1 \end{aligned}$$

On a donc une contradiction.

La suite $\{z^k\}$ est bornée et elle admet une unique valeur d'adhérence donc la suite converge vers cette valeur d'adhérence s qui est un zéro de T .

4 Présentation de l'algorithme de Fermat-Weber

Pour construire, l'algorithme de Fermat-Weber, on a dans un premier temps déterminé plusieurs projections.

4.1 Projection sur A

On veut connaître $\hat{x}^{k+1} = \text{Proj}(\hat{x}^k, A)$ pour tout k où $A = \{\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n : x_1 = \dots = x_n\}$.
 Cela revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P_A) \quad \left\{ \text{Proj}(u, A), \quad u \in (\mathbb{R}^2)^n \right.$$

$$(P_A) \quad \left\{ \min_{\hat{x} \in A} \|\hat{x} - u\|^2, \quad u \in (\mathbb{R}^2)^n \right.$$

Or

$$\|\hat{x} - u\|^2 = \langle \hat{x} - u, \hat{x} - u \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i - u_i, x_i - u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i - u_i\|^2$$

Vu que $\hat{x} \in A$, $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_1 = \dots = x_n = x$, on obtient :

$$\|\hat{x} - u\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x - u_i\|^2$$

Le problème (P_A) peut donc s'écrire :

$$(P_A) \quad \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}^2} \underbrace{\sum_{i=1}^n \|x - u_i\|^2}_{f(x)}, \quad u_i \in \mathbb{R}^2 \right.$$

Cela revient à résoudre un problème d'optimisation sans contraintes. On calcule donc $\nabla f(x)$

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= 2 \sum_{i=1}^n (x - u_i) \\ \nabla f(x) = 0 &\iff 2nx - 2 \sum_{i=1}^n u_i = 0 \\ &\iff \boxed{x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i}\end{aligned}$$

4.2 Projection sur A^\perp

On veut connaître $\hat{p}^{k+1} = \text{Proj}(\hat{p}^k, A^\perp)$ pour tout k où $A^\perp = \{\hat{y} = (y_1, \dots, y_n) \in (R^2)^n : \sum_{i=1}^n y_i = 0\}$. Cela revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}(P_{A^\perp}) &\left\{ \text{Proj}(u, A^\perp), \quad u \in (R^2)^n \right. \\ (P_{A^\perp}) &\left\{ \min_{\hat{y} \in A^\perp} \|\hat{y} - u\|^2, \quad u \in (R^2)^n \right. \\ (P_{A^\perp}) &\left\{ \begin{array}{l} \min_{y_i \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n \|y_i - u_i\|^2, \quad u \in (R^2)^n \\ \sum_{i=1}^n y_i = 0 \end{array} \right.\end{aligned}$$

C'est un problème d'optimisation avec contraintes. On calcule alors le Lagrangien Associé.

$$\begin{aligned}L(y_i, \mu) &= \sum_{i=1}^n \|y_i - u_i\|^2 + \left\langle \mu, \sum_{i=1}^n y_i \right\rangle \\ \nabla_{y_i} L(y_i, \mu) &= 2(y_i - u_i) + \mu\end{aligned}$$

Les conditions de Kuhn-Tucker sont :

$$\begin{aligned}&\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{y_i} L(y_i, \mu) = 2(y_i - u_i) + \mu = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{i=1}^n (y_i - u_i) + n\mu = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \mu = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n u_i \right.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2(y_i - u_i) + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^n u_i = 0$$

$$\text{finalement, } \boxed{y_i = u_i - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n u_i}$$

Remarque :

Le calcul de la projection sur A^\perp n'est pas nécessaire.

Soit P un point, on note P_A le projeté de P sur A et P_{A^\perp} le projeté de P sur A^\perp . D'après les calculs précédents, on remarque que : $P = P_A + P_{A^\perp}$. Ainsi la connaissance du projeté de P sur A suffit.

4.3 Projection sur B_i^0

Pour calculer le projeté sur B_i^0 , nous avons créé la fonction sous matlab *ProjectionSurBouleDuale*. Nous consacrons cette partie à l'explication de cette fonction.

4.3.1 Définition d'une boule duale

Par définition, la boule duale B_i^0 associée à la norme γ_i^0 duale de la norme γ_i est

$$B_i^0 = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : \gamma_i(p) \leq 1 \right\}$$

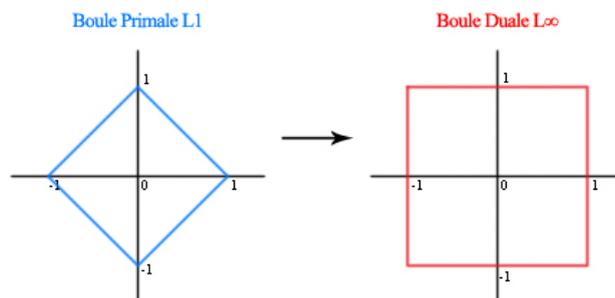
or , $\gamma_i(p) = \sup_{x \in B_i} \langle x, p \rangle$, ce qui nous donne :

$$B_i^0 = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : \sup_{x \in B_i} \langle x, p \rangle \leq 1 \right\} \iff B_i^0 = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : \langle x, p \rangle \leq 1, \forall x \in B_i \right\}$$

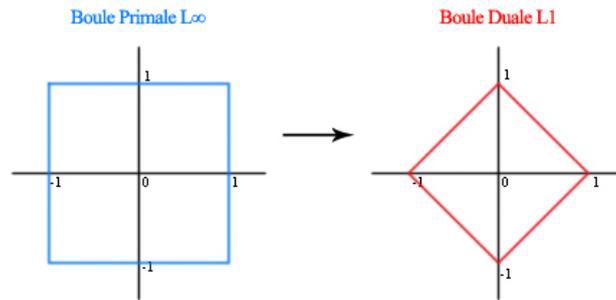
Vu que les boules sont des ensembles convexes, on obtient finalement :

$$B_i^0 = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : \langle s_j, p \rangle \leq 1, \forall s_j \in \text{Sommet}(B_i) \right\}$$

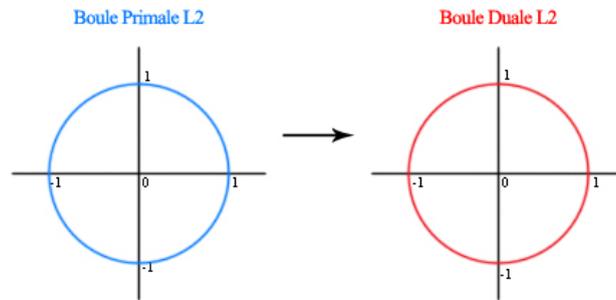
Pour les boules associées aux normes usuelles l_1, l_2, l_∞ , leurs boules duales sont connues. La boule duale associée à la norme l_1 est la boule associée à la norme l_∞ .



Réciproquement, la boule duale associé à la norme l_∞ est la boule associée à la norme l_1 .



Enfin, la boule duale associée à la norme l_2 est la boule primale associée à la norme l_2 .



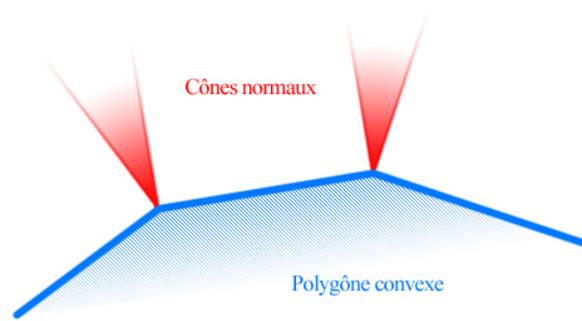
Par contre, si on considère une boule quelconque polyédrique définie par l'ensemble de ses sommets, nous avons crée une fonction *BouleDuale* sous Matlab qui nous renvoie les sommets associés à la boule duale. Cette fonction s'appuie sur la définition précédente d'une boule duale.

4.3.2 Projection sur la boule l_2

La projection sur la boule l_2 se traite à part car ce n'est pas une boule polyédrique. c'est le cercle unité. La projection d'un point M de \mathbb{R}^2 sur cette boule est lui-même si il est à l'intérieur de la boule sinon son projeté est le point $\frac{M}{\|M\|_2}$

4.3.3 Projection sur une boule polyédrique

Pour connaître la projection sur une boule polyédrique, il faut faire des considérations géométriques. Il faut, dans un premier temps, tester si le point appartient à la boule ou pas. Ensuite, si le point n'est pas dans l'intérieur de la boule, on teste s'il appartient à un cône normal de l'un des sommets. On précise qu'un point M ne peut appartenir qu'à un seul cône normal de l'un des sommets d'un polyèdre convexe. Le schéma ci-dessous nous permet de nous en convaincre.



Si le point est dans l'un des cônes normaux associés au sommet de la boule polyédrique, le projeté du point M et le sommet en question. Enfin, si on est à l'extérieur mais que l'on n'est pas dans un cône normal de l'un des sommets, on projette le point sur le bon côté de la boule polyédrique.

5 Exemples

Nous avons testé l'algorithme de Fermat-Weber sur de nombreux exemples. Voici donc le résultat de quelques situations. Pour tous ces exemples, nous avons pris pour valeur d'erreur des tests d'arrêts $\epsilon = 10^{-5}$.

1^{er} exemple :

On a choisi les points suivants :

$$a_1=[2 ; 2], a_2=[-3 ; -4], a_3=[-5 ; 10], a_4=[-1 ; 4], a_5=[-3 ; 5],$$

$$a_6=[9 ; 2], a_7=[6 ; -3], a_8=[2 ; -6], a_9=[-7 ; 1].$$

avec :

$$\gamma_i = l_1 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}$$

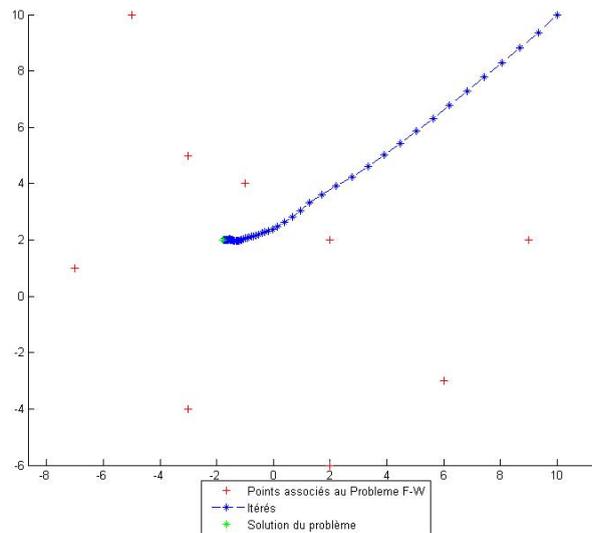
$$\gamma_i = l_2 \text{ pour } i \in \{4, 5, 6\}$$

$$\gamma_i = l_\infty \text{ pour } i \in \{7, 8, 9\}$$

$$\forall i=1, \dots, 9, \text{ on a fixé } \omega_i = 1$$

$$\text{On a pris } x_0=[10 ; 10].$$

Une solution à ce problème est $[-1.8 ; 2]$ et le nombre d'itération effectué par l'algorithme est 212.



2^{eme} exemple :

On a choisi les points suivants :

$$a_1=[0 ; 4], a_2=[4 ; 1], a_3=[2 ; -3], a_4=[-2 ; -3], a_5=[-4 ; 1],$$

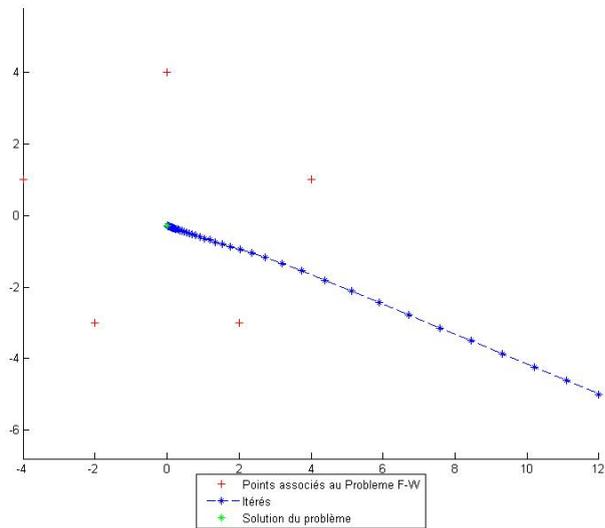
avec :

$$\gamma_i = l_2 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\forall i=1, \dots, 5, \text{ on a fixé } \omega_i = 1$$

$$\text{On a pris } x_0=[12 ; -5].$$

Une solution à ce problème est $[0.0 ; -0.283]$ et le nombre d'itération effectué par l'algorithme est 132.



3^{eme} exemple :

On a choisi les points suivants :

$$a_1=[0 ;4], a_2=[4 ;1], a_3=[2 ;-3], a_4=[-2 ;-3], a_5=[-4 ;1],$$

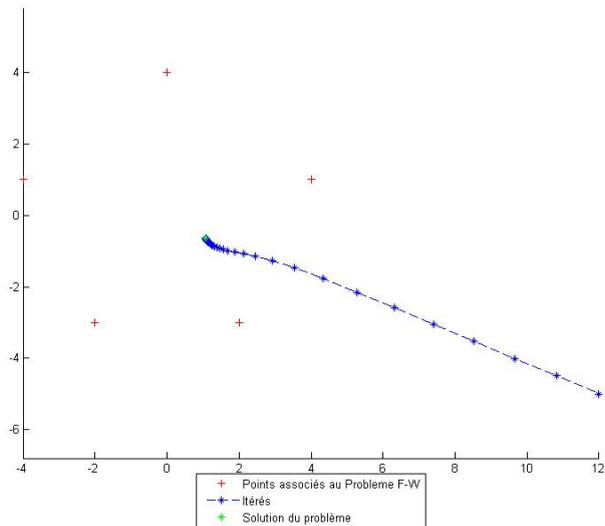
avec :

$$\gamma_i = l_2 \text{ pour } i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

On a fixé $\omega_i = \{1, 1.5, 2, 0.5, 1.5\}$

On a pris $x_0=[12 ;-5]$.

Une solution à ce problème est $[1.063 ; -0.635]$ et le nombre d'itération effectué par l'algorithme est 110.



4^{eme} exemple :

On a défini une nouvelle boule : $\text{NewBoule} = \{[-6; 2], [6; 2], [6; -2], [-6; -2]\}$ et γ_{new} la norme associée à cette nouvelle boule.

On a choisi les points suivants :

$$a_1=[0 ;0], a_2=[3 ;2], a_3=[-5 ;-6], a_4=[-4 ;4], a_5=[5 ;-3], a_6=[-1 ;-2]$$

avec :

$$\gamma_i = \gamma_{new} \text{ pour } i \in \{4, 5\}$$

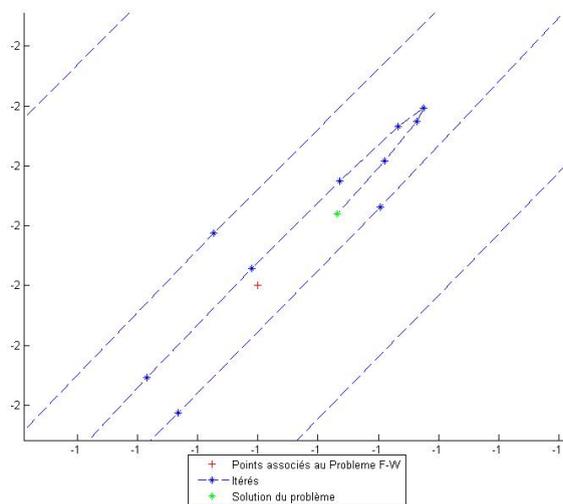
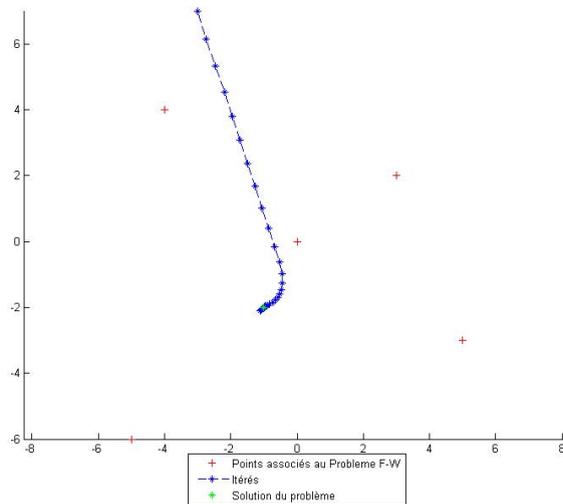
$$\gamma_i = l_2 \text{ pour } i \in \{1, 3, 6\}$$

$$\gamma_i = l_\infty \text{ pour } i \in \{2\}$$

On a fixé $\omega_i = \{1, 1.5, 2, 0.5, 1.5, 1\}$

On a pris $x_0=[-3 ;7]$.

Une solution à ce problème est $[-1.000 ; -2.000]$ et le nombre d'itération effectué par l'algorithme est 169.



6 Conclusion

Ce projet fut très intéressant dans le sens où il nous a permis de mettre en oeuvre nos connaissances développées au 1^{er} semestre sur les problèmes d'optimisation. La programmation sous le logiciel Matlab fut également très enrichissante. En effet, en cherchant à optimiser notre programme, nous avons minimisé le nombre de calculs et les appels de fonctions, le rendant ainsi plus performant. Nous avons constaté que l'algorithme de Fermat-Weber est un algorithme puissant qui converge en un faible nombre d'itérations. La compréhension de l'algorithme nous a parut complexe au premier abord car celui-ci fait appel à deux suites, l'une évoluant dans l'espace primal et l'autre dans l'espace dual.

Annexe : code des fonctions programmées sous Matlab